LVIII ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА ШКОЛСКЕ 2020/2021. ГОДИНЕ.

IV разред

Друштво физичара Србије и Министарство просвете науке и технолошког развоја Републике Србије

Крагујевац 23-24. април 2021.

ЗАДАЦИ-БЕТА КАТЕГОРИЈА*

1. Честица масе m и енергије $0<E<U_0$ налеће са лева на потенцијалну баријеру облика $U(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ U_0, & x\geq 0\end{cases}$, слика 1. Временски независна једнодимензионална Шредингерова једначина у координатној репрезентацији за честицу масе m и енергије E у потенцијалу $U(x)$ има облик $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+U(x)\psi(x)=E\psi(x)$.

а) У области $x<0$ изразити Шредингерову једначину у облику $\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+k_1^2\psi(x)=0$, $k_1>0$, и одредити израз за k_1. У датој области решење претходне једначине је облика $\psi_1(x)=C_1e^{ik_1x}+C_2e^{-ik_1x}$. **[2 поена]**

б) У области $x>0$ изразити Шредингерову једначину у облику $\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}-k_2^2\psi(x)=0$, $k_2>0$, и одредити израз за k_2. У датој области решење претходне једначине је облика $\psi_2(x)=C_3e^{k_2x}+C_4e^{-k_2x}$. Из услова да таласна функција $\psi_2(x)$ буде коначна за $x\to\infty$ одредити колика мора да буде вредност константе C_3 и написати након тога како изгледа израз за функцију $\psi_2(x)$. **[6 поена]**

в) Веза између константи се одређује из услова непрекидности таласне функције и њеног првог извода у тачки $x=0$. Вредност једне константе остаје неодређена, а одређује се нормирањем таласне функције (што се не тражи у овом задатку).

Ако је коефицијент рефлексије дефинисан у облику $R=\frac{|C_2|^2}{|C_1|^2}$, одредити његову вредност. **[10 поена]**

г) Ако се зна да је густина вероватноће налажења честице у области $x>0$ пропорционална са e^{-2k_2x} можемо дефинисати ефективну дубину продирања честице $d=\frac{1}{2k_2}$, што представља растојање за које густина вероватноће налажења честице у области $x>0$ опадне e пута. Одредити ефективну дубину продирања за електрон енергије $E_e=7\,\mathrm{eV}$ ако је $U_0=10\,\mathrm{eV}$. Користити следеће бројне вредности: маса електрона $m_e=9{,}11\cdot10^{-31}\,\mathrm{kg}$, редукована Планкова константа $\hbar=1{,}054\cdot10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$, $1\,\mathrm{eV}=1{,}602\cdot10^{-19}\,\mathrm{J}$. **[2 поена]**

2. Непокретна и хоризонтално постављена цев налази се у ваздуху. Цев је отворена на оба краја и састоји се од два дела различитих површина попречних пресека S и $2S$. У цеви се налазе два клипа чије су масе редом m и $4m$ (површина попречних пресека редом S и $2S$) који су круто спојени са неистегљивим штапом занемарљиве масе (слика 2). У равнотежном положају при притиску ваздуха између клипова који једнак спољашњем притиску p_{at} систем је у положају као на слици 2, при чему је величина L позната. Клипови могу да се крећу дуж посуде без трења. Ако клипове померимо из равнотежног положаја на растојање које је много мање од L одредити период малих осцилација клипова, под условом да је процес између клипова изотермски.

Искористити апроксимацију $(1+a)^{-n}\approx1-na, a>0, a<<1, n>0$. Све наведене величине у задатку сматрати познатим. Ваздух сматрати идеалним гасом. **[20 поена]**

3. а) Двоструко јонизовани, непокретни и побуђени атом литијума ${}^{7}_{3}Li^{2+}$ емитује фотон који одговара четвртој емисионој спектралној линији Лајманове серије. Одредити вредност енергије емитованог фотона и изразити је у јединицама eV. **[7 поена]**

б) Рачунским путем одредити интервал таласних дужина емисионог спектра Пашенове серије троструко јонизованог и непокретног атома берилијума ${}^{9}_{4}Be^{3+}$. **[8 поена]**

Користити следеће бројне вредности: Ридбергова константа $R=1{,}097\cdot10^{7}\,\mathrm{m^{-1}}$, величина $R\cdot h\cdot c=13{,}6\,\mathrm{eV}$ (где је R-Ридбергова константа, $h-$Планкова константа, c - брзина светлости у вакууму)

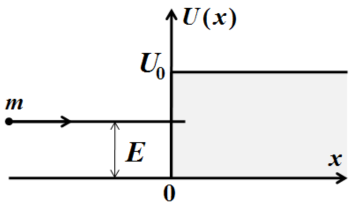
4. Посматрајмо инверзно Комптоново расејање релативистичког електрона укупне енергије E (кинетичка енергија електрона је већа од енергије мировања електрона E_0) и фотона ниске енергије $h\nu$ (његова енергија је мања од енергије мировања електрона E_0). Процес расејања је схематски приказан на слици 3.

а) Изразити енергију расејаног фотона $h\nu'$ преко величина E, E_0, h, ν и угла θ. **[11 поена]**

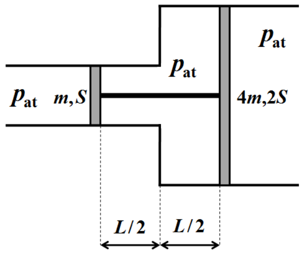
б) Одредити вредност угла θ тако да је енергија расејаног фотона $h\nu'$ максимална и у том случају изразити енергију расејаног фотона $h\nu'$ преко величина E, E_0, h, ν . **[3 поена]**

в) За вредности $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2} = 7$ упадног електрона, и таласну дужину $\lambda = 500\ \mathrm{nm}$ упадног фотона, одредити максималну енергија расејаног фотона (у јединицама eV) и његову таласну дужину. **[6 поена]**

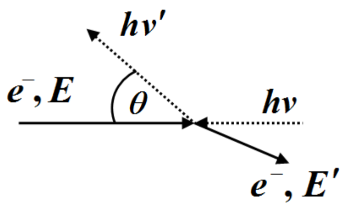
Користити следеће бројне вредности: енергија мировања електрона $E_0 = 0{,}511\ \mathrm{MeV}$, Планкова константа $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$, брзина светлости у вакууму $c = 2{,}998 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m/s}$, $1\,\mathrm{eV} = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}$.



слика 1



слика 2



слика 3

Напомена. Задатак из обраде резултата мерења добићете на два посебна листа папира!

* У бета категорији такмиче се ученици који похађају одељења која раде по програмима гимназија општег типа, специјализованих гимназија за области које нису математика и физика, средњих стручних школа и уметничких школа.

Решења свих задатака треба јасно образложити са јасно дефинисаним физичким законима и величинама које користите приликом решавања задатака. Нарочито дефинисати ознаке које уводите а које нису уобичајене.

Обавезно на сваком листу папира (и на милиметарском папиру) који предајете напишите своју шифру, и обавезно нумеришите сваку страну!

Задатке припремили: Владимир Чубровић 1,2,3,4; доц. др Владимир Марковић 5, ПМФ, Крагујевац
Рецензенти: проф. др Милан Ковачевић, доц. др Јасна Стевановић и Жељко Цимбаљевић, ПМФ, Крагујевац; Владимир Чубровић 5;

Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: доц. др Владимир Марковић,ПМФ, Крагујевац

Свим такмичарима желимо успешан рад!

РЕШЕЊА-БЕТА КАТЕГОРИЈА*

1. а) У области $x<0$ таласна функција је $\psi_1(x)=C_1e^{ik_1x}+C_2e^{-ik_1x}$ при чему је $k_1=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ **[2п]**

б) У области $x>0$ таласна функција је $\psi_2(x)=C_3e^{k_2x}+C_4e^{-k_2x}$, при чему је $k_2=\sqrt{\frac{2m(U_0-E)}{\hbar^2}}$ **[2п]**, а из услова да таласна функција буде коначна за $x\to\infty$ следи $C_3=0$ **[2п]**, тако да је $\psi_2(x)=C_4e^{-k_2x}$ **[2п].**

в) Из непрекидности таласне функције и њеног првог извода (коначан скок потенцијала) следи $C_1+C_2=C_4$ **[2п]** и $ik_1C_1-ik_1C_2=-k_2C_4$ **[2п],** тако да је $C_1=\frac{k_1+ik_2}{2k_1}C_4$ **[1п]** и $C_2=\frac{k_1-ik_2}{2k_1}C_4$ **[1п]**.

Коефицијент рефлексије је $R=\frac{|C_2|^2}{|C_1|^2}=\frac{|k_1-ik_2|^2}{|k_1+ik_2|^2}=\frac{k_1^2+k_2^2}{k_1^2+k_2^2}=1$ **[3+1п].**

г) Ефективна дубина продирања за електрон је $d=\frac{1}{2k_2}=\frac{\hbar}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2m_e(U_0-E_e)}}$ тако да је $d\approx 0{,}56\cdot 10^{-10}$ m **[2п].**

2. Ако клипове померимо у десну страну за мало растојање x, тада је једначина кретања клипова $5ma=5m\frac{d^2x}{dt^2}=-p_{\mathrm{at}}\cdot 2S+p\cdot 2S-pS+p_{\mathrm{at}}\cdot S$ **[5п],** односно $\frac{d^2x}{dt^2}+(p_{\mathrm{at}}-p)\cdot\frac{S}{5m}=0$ (1). Из једначине изотермског процеса $p_{\mathrm{at}}\cdot\left(\frac{L}{2}\cdot S+\frac{L}{2}\cdot 2S\right)=p\cdot\left(\left(\frac{L}{2}-x\right)\cdot S+\left(\frac{L}{2}+x\right)\cdot 2S\right)$ **[5п],** следи $p=p_{\mathrm{at}}\cdot\left(1+\frac{2x}{3L}\right)^{-1}$ **[2п],** и ако искористимо апроксимацију $(1+a)^{-n}\approx 1-na, a>0, a<<1, n>0$, јер је $x<<L$, добијамо $p\approx p_{\mathrm{at}}\cdot\left(1-\frac{2x}{3L}\right)$ **[4п],** тако да једначина (1) добија облик $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{2p_{\mathrm{at}}S}{15Lm}\cdot x=0$ **[2п]** при чему је $\omega^2=\frac{2p_{\mathrm{at}}S}{15Lm}$, а период осциловања $T=2\pi\cdot\sqrt{\frac{15Lm}{2p_{\mathrm{at}}S}}$ **[2п].**

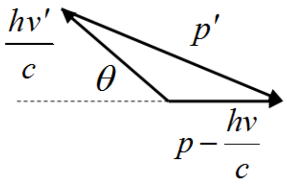
3. а) Таласна дужина спектралне линије која одговара преласку електрона са главним квантим бројем m у стање електрона са главним квантним бројем n водонику сличних јона одређена је формулом $\frac{1}{\lambda}=RZ^2\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right)$ (1) **[1п]**. Енергија емитованог фотона се може приказати формулом $\frac{hc}{\lambda}=hcRZ^2\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right)$ тј. $E_{\mathrm{fotona},m\to n}=13{,}6\mathrm{eV}\cdot Z^2\cdot\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right)$ **[2п]**. У случају четврте спектралне линије Лајманове серије двоструко јонизованог, непокретног, и побуђеног атома литијума ${}_3^7Li^{2+}$ је $Z=3$ **[1п]**, $n=1$ **[1п]** и $m=5$ **[1п]** тако да је $E_{fotona,5\to 1}\approx 117{,}5\,\mathrm{eV}$ **[1п].**

б) Интервал таласних дужина емисионог спектра, за прелазе $m\to n$, $m>n$, при чему је за први прелаз $m=n+1$, а за јонизацију $m=\infty$, користећи формулу (1) је $\lambda\in\left[\frac{n^2}{RZ^2},\frac{n^2(n+1)^2}{2n+1}\cdot\frac{1}{RZ^2}\right]$ **[4п]**. За јон берилијума ${}_4^9Be^{3+}$ је $Z=4$ **[1п]**, а Пашенова серија одређена главним квантним бројем $n=3$ **[1п]** тако да је $\lambda_{\text{Pašenova}}\in[51{,}3\,\mathrm{nm},117{,}2\,\mathrm{nm}]$ **[2п]**.

4. **а)** За дати процес закон одржања енергије гласи $h\nu + E = h\nu' + E'$ **[2п]**. Из закона одржања импулса примењен на троугао импулса важи $(p'c)^2 = (h\nu')^2 + (pc - h\nu)^2 + 2h\nu'(pc - h\nu)\cos\theta$ **[5п]**. Такође важе следећи изрази $E^2 = (pc)^2 + E_0^2$ **[1п]** и $E'^2 = (p'c)^2 + E_0^2$ **[1п]**. Из претходних једначина следи $h\nu' = \dfrac{E + \sqrt{E^2 - E_0^2}}{E + h\nu + (\sqrt{E^2 - E_0^2} - h\nu)\cos\theta} \cdot h\nu$ **[2п]**.

б) Како је по услову задатка $E_k > E_0$ (кинетичка енергија електрона је већа од енергије мировања електрона E_0) и $h\nu < E_0$ (енергија фотона је мања од енергије мировања електрона E_0), тада је $\sqrt{E^2 - E_0^2} > h\nu$, следи да је максимална енергија расејаног фотона $h\nu'_{\max}$ у случају када је $\theta = \pi$ **[2п]**, тако да је максимална енергија расејаног фотона $h\nu'_{\max} = \dfrac{E + \sqrt{E^2 - E_0^2}}{E + 2h\nu - \sqrt{E^2 - E_0^2}} \cdot h\nu$ **[1п].**

в) Како је $E = \gamma E_0$ **[1п]** и $h\nu = \dfrac{hc}{\lambda} \approx 2{,}48\,\mathrm{eV}$ **[1п]** последњи израз добија облик $h\nu'_{\max} = \dfrac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma + \dfrac{2h\nu}{E_0} - \sqrt{\gamma^2 - 1}} \cdot h\nu \approx 481\,\mathrm{eV}$ **[1+1п],** тако да је $\lambda' = \dfrac{c}{\nu'_{\max}} \approx 2{,}58\,\mathrm{nm}$ **[1+1п].**



Слика 1